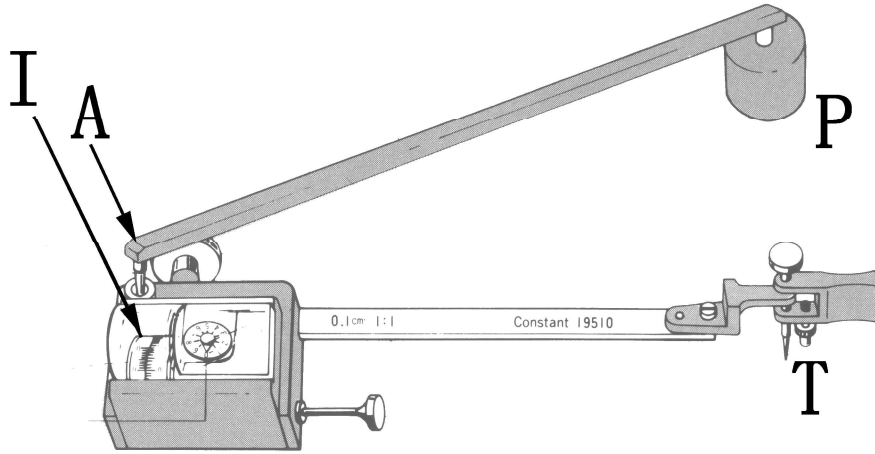


プランメータの原理

1. 構造

プランメータは複雑な曲線図形の面積を測定する器械です。固定された極点Pを中心に器械は回転します。トレースポイントTで測定したい図形の外周をトレースすると、積分車Iが回転して面積値を表示します。



2. 積分車の進行について

図1の様に

極点：P

極棹：PA 主棹：AT

積分車：I トレースポイント：T

からなるプランメータで面積を計測する場合、積分車の進行について考えます。

円周上の点T-T''間をトレースした場合、プランメータは図2aの様に運動します。この運動はT-T'への並進運動(dn)と点T'-T''への回転運動(d)に分解されます。

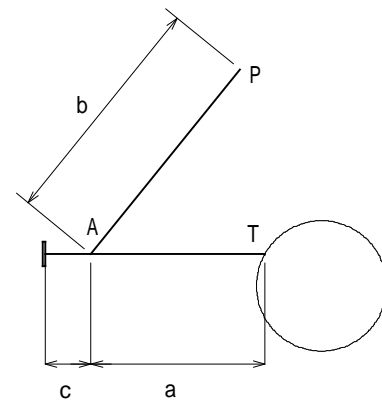


図1

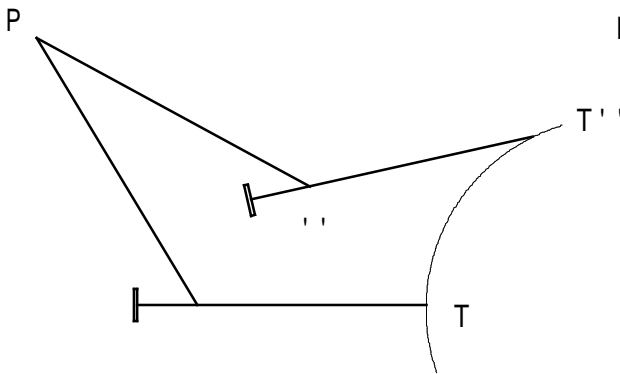


図2a

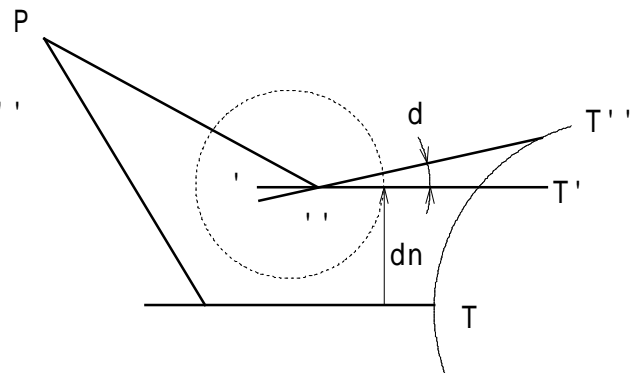


図2b

積分車 I の接線方向の運動量 (dI) は

$$dI = dn - cd \quad (1)$$

この運動により、主棹 (AT)・極棹 (PA) が払う面積は
図 3 より

$$\begin{aligned} dS &= adn + a^2 \frac{d}{2} + b^2 \frac{d}{2} \\ &= adn + \frac{a^2 d}{2} + \frac{b^2 d}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

(1)(2)より

$$dS = a(dI + cd) + \frac{a^2 d}{2} + \frac{b^2 d}{2} \quad (3)$$

トレースする図形の面積は

$$S = \oint dS \quad (4)$$

となります。

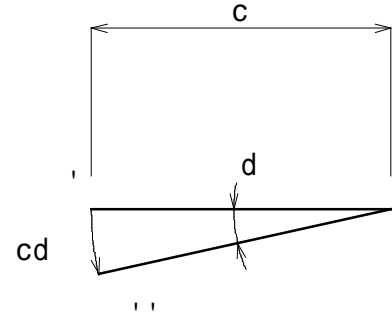


図 2 b 拡大図

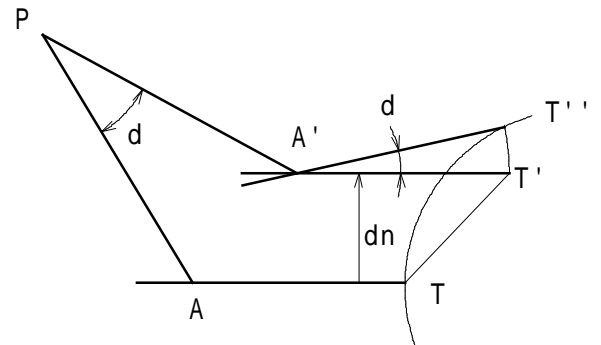


図 3

3. 図形のトレース

円の面積を求める場合、円の面積は次式で求められます。

$$S = \oint rd$$

プランメータで計測した場合、棹が払う面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{T1}^{T3} rd + \int_{T3}^{T1} rd \\ &= (S + S') - S' = S \end{aligned}$$

となり、棹の払う面積が計測する面積と等しいこととなります。

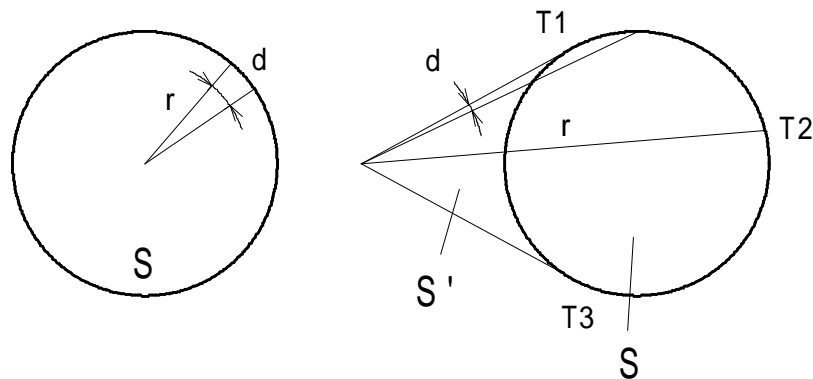


図 4

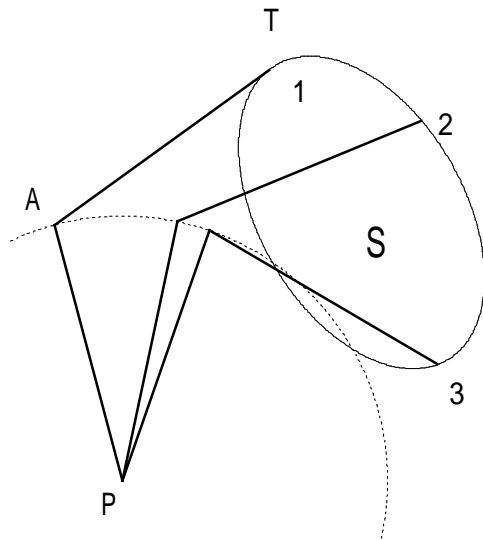


図 5

図 5 の様に図形 S を計測する場合、極棹 (PA) は左右に一往復、主棹 (AT) は上下に一往復します。そのときに極棹が左端から右端まで移動するときの回転角を

$$\int_1^3 d = l$$

とすると、右端から左端へもどる時は

$$\int_3^1 d = -l$$

従って、全回転角は

$$\oint d = 0$$

同様に

$$\oint d = 0$$

従って(4)式は

$$S = \oint dS = \oint adl + \left(ac + \frac{a^2}{2}\right) \oint d + \frac{b^2}{2} \oint d = \oint adl = al$$

a : 主棹の長さ l : 積分車の接線方向の移動量

積分車の半径を r トレース時の積分車回転数を n とすると

$$l = 2 \pi r n$$

よって

$$S = 2 \pi r n a$$

となり求める面積は、積分車の回転量に比例します。